Examen - Convocatoria Extraordinaria

[**3 horas**]

- **No está permitido utilizar (ni acceder a) ningún tipo de documentación.**

1. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias de Bernoulli, independientes, de parámetro $p = 0.6$. Sea $S(n)$ el proceso estocástico discreto en el tiempo definido por

$$S(n) = \sum_{k=n}^{n+2} X_k \text{ con } n = 1, 2, \ldots$$

   a) Calcular la media y la autocovarianza del proceso $(S(n), n \geq 1)$.

   b) Calcular la distribución de $S(n)$.

   c) ¿Es $S(n)$ estacionario en sentido débil?

   d) ¿Es $S(n)$ estacionario en sentido estricto?

(2 Puntos)

2. Dada la cadena de Markov con estados $\{1, 2, 3, 4\}$ y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   y asumiendo que la distribución inicial es

$$\pi(0) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Dibujar el diagrama de transición, caracterizar los estados y sus periodos.

   b) Calcular el valor medio de $2X^2(2) - X(1)$.

   c) Encontrar la familia de distribuciones estacionarias.

   d) Calcular la distribución límite de $X(\infty)$.

(3 Puntos)

3. Considera la cadena de Markov en tiempo tiempo continuo con estados $\{1, 2, 3\}$, generador

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 5 & -(a+5) & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   que empieza al tiempo 0 en el estado 1.

   a) Caracterizar los estados de la cadena al variar del parámetro $a \geq 0$.

   b) Calcular en función del parámetro $a \geq 0$ la distribución límite.

   c) Indicar el valor del parámetro $a \geq 0$ para que el tiempo medio que la cadena pasa en el estado 1 sea igual a $26/5$.

(2 Puntos)

4. Considera una empresa cuyo superávit, medido a final de cada año, se puede modelar por medio del siguiente proceso

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}, \quad n \geq 0$$

   y $S_0 = 4$, donde las variable X_n, $n \geq 1$ son idénticamente distribuida y con distribución

$$X_1 = \begin{cases} -2 & \text{con probabilidad } 20.00\,\% \\ +2 & \text{con probabilidad } 80.00\,\% \end{cases}$$

   a) Calcula el valor de $\mathbb{E}[(1/2)^{X_1}]$.

   b) Muestra que el proceso $W_n = (1/2)^{S_n}$ es una martingala.

   c) Define el tiempo T hasta que la empresa quiebre o alcance un valor de superavit igual a 10. Calcula la probabilidad de que una vez llegado a T, la empresa haya quebrado.

   d) Calcula la distribución de S_T y su varianza.

(3 Puntos)